L'exponentielle de matrice réalise un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Développement pour les leçons 155 [1], 156 [2], 158 [3], 160 [4], 203 [5].

1 Introduction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $d(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale ayant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comme coefficients. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients dans $\mathbb{R}$. On rappelle qu'une matrice symétrique réelle est toujours diagonalisable dans une base orthonormée et que ses valeurs propres sont toutes réelles : pour tout $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}SP$ est diagonale et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques dont toute les valeurs propres sont strictement positives. On rappelle que si A et B sont deux matrices diagonalisables telles que $AB = BA$, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales : on dit qu'elles sont **simultanément diagonalisable**. Enfin, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $|||\cdot|||_2$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad |||M|||_2 = \max_{||x||_2=1} ||Mx||_2$$

On remarque alors que si $\rho(M)$ est le rayon spectrale de M, c'est à dire le module de la plus grande valeur propre de M, alors on a l'identité

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad |||M|||_2 = \sqrt{\rho\left(M^T M\right)}$$

On note exp l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définit par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \exp(M) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!}$$

Comme la suite $\left(M \mapsto \frac{M^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est normalement convergente, la fonction $\exp$ est bien définit et est continue. L'objectif de ce développement est de montrer que la restriction de l'application $\exp$ à l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ fournit un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2 Démonstration du résultat

La démonstration va se faire en plusieurs étapes.

Montrons que $\exp(\mathcal{S}_\mathbf{n}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_\mathbf{n}^{++}(\mathbb{R})$: Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$M = Pd(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$$

Ainsi, on a bien que

$$\exp(M) = \exp\left(P^{-1}d(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P\right) = Pd(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})P^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

D'où $\exp(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Montrons que $\exp$ est surjective : Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = P^{-1}d(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P$ avec les $\lambda_i > 0$. Ainsi, on peut considérer $\mu_i = \log(\lambda_i)$, poser $A = P^{-1}d(\mu_i)P$ et on obtient ainsi que $\exp(A) = B$.

Montrons que $\exp$ est injective : Soient $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\exp(A) = \exp(A')$. Montrons que $A = A'$. Notons λ_i les valeurs propres de la matrice A. Alors il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P^{-1}d(\lambda_i)P$. Soit Q un polynôme vérifiant pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ (on prend par exemple un polynôme interpolateur). Remarquons d'abord que A' commute avec $\exp(A')$ car $\exp(A')$ est une série en A'. Ainsi, on a

1. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
2. Exponentielle de matrices. Applications.
3. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
4. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
5. Utilisation de la notion de compacité.

$$\begin{aligned}
Q(\exp(A')) &= Q(\exp(A)) \\
&= Q(\exp(P^{-1}d(\lambda_i)P)) \\
&= Q(P^{-1}\exp(d(\lambda_i))P) \\
&= P^{-1}Q(d(e^{\lambda_i})P \\
&= P^{-1}d(Q(e^{\lambda_i})P \\
&= P^{-1}d(\lambda_i)P \\
&= A
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $Q(\exp(A')) = A$, on en déduit que A' commute avec A (car A' commute avec $\exp(A')$ et donc commute avec tout polynôme en $\exp(A')$ donc A' commute avec $Q(\exp(A')) = A$). Ainsi, A et A' sont simultanément diagonalisables : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que, en notant λ'_i les valeurs propres de A', on a que

$$A = P^{-1}d(\lambda_i)P, \quad A' = P^{-1}d(\lambda'_i)P$$

On en déduit ainsi, comme $\exp(A) = \exp(A')$, que $e^{\lambda_i} = e^{\lambda'_i}$, donc $\lambda_i = \lambda'_i$ et donc, comme A et A' sont diagonalisables dans une même base, on en déduit que $A = A'$ et donc que $\exp$ est injective.

Montrons $\exp^{-1}$ est bien continue : Soit (B_p) une suite de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers une suite $B \in SnRp$. Alors il existe (A_p) une suite de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $\exp(A_p) = B_p$ et $\exp(A) = B$. Pour montrer que $\exp^{-1}$ est continue, il suffit de montrer que la suite (A_p) converge vers A.

Comme la suite (B_p) est convergente, la suite (B_p) est bornée et il existe donc une constance $C > 0$ telle que les valeurs propres des matrices (B_p) et de B soient majorées par C. La fonction $M \mapsto M^{-1}$ est continue. Ainsi, on en déduit que la suite (B_p^{-1}) converge vers (B^{-1}). De plus, les valeurs propres de B^{-1} sont les inverses des valeurs propres de B. Ainsi, il existe une constante C' qui minore les valeurs propres de la suite de (B_p) et de B et elles sont donc toutes dans le compact $K = [C', C]$. Ainsi, les valeurs propres de toute les matrices de la suite (A_p) se trouvent dans le compact $[\log(C'), \log(C)]$ et donc la suite (A_p) est bornée. Or, cette dernière ne possède que A comme valeur d'adhérence : si (A_{p_k}) converge vers A', alors on a aussi $\exp(A_{p_k}) = B_{p_k}$ qui converge vers B et donc $\exp(A') = B = \exp(A)$ et donc $A = A'$ par injectivité. (A_p) étant une suite bornée d'un espace vectoriel de dimension finie admettant une unique valeurs d'adhérence, elle est convergente et on en déduit que (A_p) converge vers A. $\square$

3 Remarques

Notons que si l'on définit l'exponentielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\exp$ est surjective sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Si l'on restreint son image à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors son image est l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$.

4 Bibliographie

J'ai entièrement utilisé le tome premier de *Histoire Hédonistes de groupes et de géométries* de Caldero et Germoni, page 208 tout en bas de la page. Faut un peu détailler certains passages rapides mais sinon c'est top.